Prof. Amed

Universidad Tecnológica Nacional Regional Bs.As. **Análisis Matemático II** **Primer Parcial** **2015**

fecha: 16-05-2015 **Curso: Z 2011**

Apellido y Nombre :...

Teórico 1) Demostrar que si un campo escalar es diferencia ble en $\overline{X}_0 \Rightarrow$ f es contínua en $\overline{X}_0$

Teórico 2) a)Sea $f:D\subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $k \in I_f$. Defina conjunto de *nivel k de f*

b)Halle el conjunto de nivel 0 de f y represéntelo / $f(x,y)=\begin{cases} sen(\pi x y) & \text{si } x\geq 0 \\ x^2-y^2 & si \quad x<0 \end{cases}$

P 1) Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ / $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x\,.y^2}{x^2+y^4} & \text{si } y\neq 0 \\ \text{sen}(3x+4y) & \text{si } y=0 \end{cases}$

Se pide : 1) Representar el D_f. 2)Analizar :a)Existencia del $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ b) Continuidad de f en (0,0)

c)Derivabilidad de f en $\overline{X}_0 = (0,0)$ $\forall \breve{u}$. d) $\overline{\nabla} f\left(\overline{X}_0\right)$ con $\overline{X}_0=(0,0)$

e) ¿Se cumple $\forall\breve{u}$: $f'(\overline{X}_0,\breve{u})=\overline{\nabla} f\left(\overline{X}_0\right)\bullet\breve{u}$? con $\overline{X}_0=(0,0)$ f)¿Es f diferenciable en (0,0)?

P 2) Dada $z=\ln(\dfrac{u.v}{4})+\dfrac{4v}{u}+\dfrac{5}{6}u$ con $u=\dfrac{1}{27}x^3\,.y-g(x)+6$ *tal que* $g'(x)=\dfrac{g(x)}{x-1}$ *con* $g(3)=4$

$v=\phi(x,y)$ definida implícitamente por $y^2+x.e^{3y-x}+\ln v=7v$ resulta $z=h(x,y)$

a)Halle las direcciones $\breve{u}$ tales que $h'((3,2),\breve{u})=0$

b)Halle la derivada direccional máxima de h en (3,2) y la dirección que la promueve.

P 3) Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ / $f(x;y,z)=x^2+2y^2-z+6$

Halle la derivada direccional de "f" en $\overline{X}_0=(2,2,2)$ a)respecto de un versor tangente a la curva "C" en $\overline{P}_0=(1,1,z_0)$ / "C"=$S_1\cap S_2$. b)respecto de un versor normal a S_2 en $\overline{P}_0=(1,1,z_0)$

S_1 es superficie de nivel "6" correspondiente al campo f, mientras que S_2 tiene ecuación $z=4-x^2$

−Represente la curva "C" en el primer octante.

P 4)Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.Si la superficie de ecuación $z=f(x,y)$ tiene plano tangente de ecuación:

$2x+y-3z=3$ en el punto $(3,3,z_0)$. Se pide: a) Calcular $f'((3;3),\breve{u})$ si $\breve{u}$ es tangente en $\overline{A}=(2,2)$ a la curva de nivel cero del campo $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$/

$$/\ g(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2-8}{\sqrt{x.y}} & \text{si } x.y>0 \\ \text{sen}(\pi y-\pi x) & \text{si } x.y\leq 0 \end{cases}$$

b)Expresar analítica y gráficamente el D_g *y* su conjunto de nivel "0"

AM2	1° parcial Prof. Amed	HOJA N° 1/4 FECHA 16-5-15

T1 Demostrar que si un campo escalar es diferenciable en $\bar{x}_0$ entonces f es continua en $\bar{x}_0$

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ / $\boxed{f \text{ es diferenciable en } \bar{x}_0} \Rightarrow \exists\, \varepsilon(\bar{x}_0)$ /

$f(\bar{x}_0 + \bar{v}) - f(\bar{x}_0) = \nabla f(\bar{x}_0) \cdot \bar{v} + \varepsilon(\bar{v}) \, \|\bar{v}\| \Rightarrow$

$\bar{v}$: vector incremento

$$\Rightarrow \lim_{\bar{v} \to \bar{0}} f(\bar{x}_0 + \bar{v}) - \underbrace{\lim_{\vec{v} \to \bar{0}} f(\bar{x}_0)}_{\text{I} \to f(\bar{x}_0)} = \underbrace{\lim_{\bar{v} \to \bar{0}} \nabla f(\bar{x}_0) \cdot \vec{v}}_{\text{II} \to 0} + \underbrace{\lim_{\vec{v} \to 0} \varepsilon(\bar{v}) \, \|\bar{v}\|}_{\text{III} \to 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\bar{v} \to \bar{0}} f(\bar{x}_0 + \bar{v}) = f(\bar{x}_0) \Rightarrow \boxed{f \text{ es continua en } \bar{x}_0}$$

I $\bar{x}_0 \in Dom(f) \Rightarrow \exists\, f(\bar{x}_0) \Rightarrow \lim_{\vec{v} \to 0} \underbrace{f(\bar{x}_0)}_{\in \mathbb{R}} = f(\bar{x}_0)$

II f dif en $\bar{x}_0 \Rightarrow \exists\, \nabla f(\bar{x}_0) \Rightarrow \exists \lim_{\vec{v} \to \bar{0}} \nabla f(\bar{x}_0) \Rightarrow \lim_{\bar{v} \to \bar{0}} \nabla f(\bar{x}_0) \cdot \bar{v} = 0$

III f dif $\Rightarrow \lim_{\bar{v} \to \bar{0}} \varepsilon(\bar{v}) \, \|\bar{v}\| = 0$

NOTA

$\boxed{T2}$ a) Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $k \in I_f$ Definir conj de nivel k de f

$$C_k = \{(x,y) \in \overbrace{Dom(f)}^{D} : f(x,y) = k\}$$

b) Hallar el conj de nivel 0 de f y representarlo /

$$f(x,y) = \begin{cases} sen(\pi x y) & si \quad x \geq 0 \\ x^2 - y^2 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

$Dom(f) = \mathbb{R}^2$

$C_0 = \{(x,y) \in Dom(f) \,/\, f(x,y) = 0\}$

$\boxed{Si \ x \geq 0}$ $\quad sen(\pi x y) = 0 \to \boxed{x = 0}$, $\boxed{y = 0}$

$\underbrace{x \neq 0 \wedge y \neq 0}$

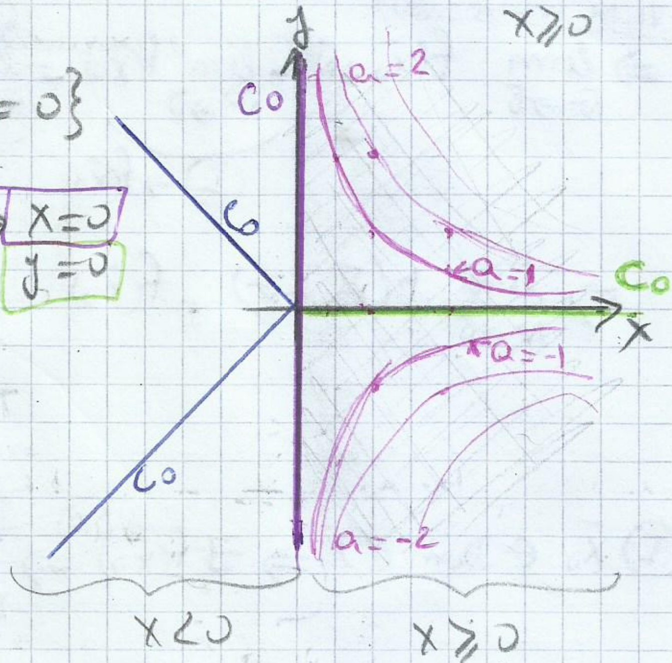
$xy = a \quad a \in \mathbb{Z}$

$y = \frac{a}{x}$

$\boxed{Si \ x < 0}$ $\quad x^2 - y^2 = 0$

$x^2 = y^2$

$\boxed{|x| = |y|}$



NOTA

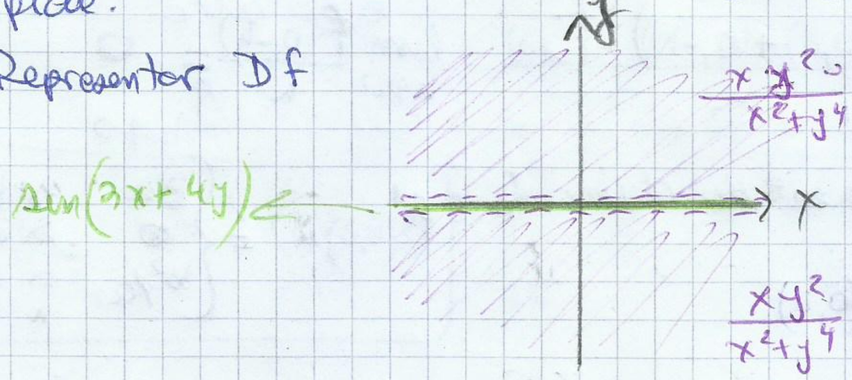
AM2	1° parcial Prof. Amed	HOJA N° 2/4 FECHA 16-5-15

P1 Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ /

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x y^2}{x^2+y^4} & \text{si } y \neq 0 \\ \operatorname{sen}(3x+4y) & \boxed{\text{si } y = 0} \end{cases}$$

Se pide:

1) Representar Df



2) Analizar;

a) Existencia del $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \overset{y=0}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\operatorname{sen}(3x)}_{\to 0} = 0$$

$$y \neq 0 \; = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x y^2}{x^2+y^4} \begin{cases} \xrightarrow{\text{si } x=0} = 0 \\ \xrightarrow{\text{si } x=y^2} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^4}{y^4+y^4} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \neq$$

$$\boxed{\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)}$$

b) Continuidad de f en (0,0)

Como no existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \Rightarrow f$ NO es cont. en (0,0)

c) Derivabilidad de f en $\bar{x}_0 = (0,0)$ $\forall \breve{u}$ $\breve{u} = (a,b)$, $a^2+b^2=1$

$$f'((0,0),\breve{u}) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h\breve{u}) - \overbrace{f(0,0)}^{0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(ha,hb)}{h} \; \circledast$$

$\circledast$ si $b=0 \to = \lim\limits_{h\to 0} \underbrace{\dfrac{\operatorname{sen}(3ha)}{h} \cdot \dfrac{3a}{3a}}_{\to 1} = \boxed{3a \Rightarrow \text{si } b=0}$

$\circledast$ si $b \neq 0 \to = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h} \dfrac{h a h^2 b^2}{h^2a^2+h^4b^4} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cancel{h^2} a b^2}{\cancel{h^2}(a^2+\underbrace{h^2 b^4}_{\to 0})} =$

NOTA

$$= \lim_{h\to 0} \frac{ab^2}{a^2} \xrightarrow{si\ a\neq 0} \lim_{h\to 0} \frac{b^2}{a} = \frac{b^2}{a} \quad si\ b\neq 0\ y\ a\neq 0$$

$b\neq 0$ y $a=0 \to \check{N}_1=(0,1)$, $\check{N}_2=(0,-1)$

$$f'((0,0),(0,1)) = f'_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+(0,h)) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)}{h} \overset{b\neq 0}{=} 0$$

$$f'((0,0),(0,-1)) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+(0,-h)) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,-h)}{h} \underset{b\neq 0}{=} 0$$

f es derivable en toda dirección : $\boxed{f'((0,0),\check{u}) = \begin{cases} 3a & si\ b=0 \\ 0 & si\ a=0 \\ b^2/a & si\ b\neq 0 \wedge a\neq 0 \end{cases}}$

d) $\bar{\nabla} f(\bar{x}_0)$ con $(\bar{x}_0)=(0,0)$

$$\bar{\nabla} f(0,0) = (f'_x(0,0), f'_y(0,0)) = (f'((0,0),\underset{\substack{a=1\\b=0}}{(1,0)}), f'((0,0),\underset{\substack{a=0\\b=1}}{(0,1)})) = (3,0)$$

$$\boxed{\bar{\nabla} f(0,0) = (3,0)}$$

e) ¿ Se cumple $\forall \check{u}$ $f'(x_0,\check{u}) = \bar{\nabla} f(\bar{x}_0)\cdot\check{u}$? con $\bar{x}_0=(0,0)$

NO . $\check{u} = (\overset{a}{\frac{1}{\sqrt{2}}}, \overset{b}{\frac{1}{\sqrt{2}}}) \to$ s/ definición : $f'((0,0),\check{u}) = b^2/a$

$$\boxed{f'((0,0),(\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}})) = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$s/\ \nabla f(0,0)\cdot\check{u} = (3,0)\cdot(\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{3}{\sqrt{2}} \neq$$

f) ¿ es diferenciable en (0,0)?

NO . f NO es continua en (0,0) $\Rightarrow$ f NO es dif en (0,0)

NOTA

AM2	1º parcial Prof. Amed	HOJA Nº 3/4 FECHA 16-5-15

(P2) Dada $z = \ln\left(\frac{u \cdot v}{2}\right) + \frac{4v}{u} + \frac{5}{6}u$ con $u = \frac{1}{27}x^3 y - g(x) + 6$

tal que $g'(x) = \frac{g(x)}{x-1}$ con $g(3) = 4$, $v = \phi(x,y)$ definida implícitamente por $y^2 + xe^{3v-x} + \ln(v) = 7v$ resuelta $z = h(x,y)$

a) Hallar las direcciones $\breve{u}$ tales que $h'((3,2),\breve{u}) = 0$

$z = h(x,y) \in C^1$ (polinomio) $\Rightarrow h'((3,2),\breve{u}) = \overline{\nabla} h(3,2) \cdot \breve{u}$

para que $h'((3,2),\breve{u}) = 0 \Rightarrow \breve{u} \perp \overline{\nabla} h(3,2) \Longrightarrow$ Hallo $\overline{\nabla} h(3,2)$

$z = f(u,v)$ con u y v funciones de x e y $\rightarrow$ h es función compuesta

$\overline{j}(x,y) = (u(x,y), \phi(x,y)) \Rightarrow h(x,y) = f(j(x,y)) \Rightarrow \boxed{Dh(x,y) = Df_{\overline{j}(x,y)}\, D\overline{j}(x,y)}$

• $\overline{j}(3,2) = (u(3,2), \phi(3,2)) =$
$= (4, 1)$

$\hookrightarrow u(3,2) = \frac{3^3}{27} \cdot 2 - g(3) + 6 = 4$

$\phi(3,2)$: def. implícitamente

$2^2 + 3e^{3v-3} + \ln(v) = 7v$

$\boxed{v = 1 = \phi(3,2)}$

$Dh(3,2) = Df_{(j(3,2))} \cdot D\overline{j}(3,2) =$

$= Df_{(4,1)} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$

(ver atrás) $\rightarrow$ $= \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2/3 & -2/3 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \frac{10}{3} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h'_x(3,2) & h'_y(3,2) \end{pmatrix}$ $\longrightarrow$

$Dj = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ \phi'_x & \phi'_y \end{pmatrix} \rightarrow D\overline{j}(3,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$

$u'_x = \frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{27}_9} y - g'(x) \rightarrow u'_x(3,2) = 2 - \frac{\overset{4}{g(3)}}{3-1} = \boxed{0 = u'_x(3,2)}$

$u'_y = \frac{x^3}{27} \rightarrow \boxed{u'_y(3,2) = 1}$

$\boxed{\phi'_x \text{ y } \phi'_y} \rightarrow F(x,y,v) = y^2 + xe^{3v-x} + \ln(v) - 7v$

$F'_x = e^{3v-x} + xe^{3v-x}(-1) \longrightarrow F'_x(3,2,1) = -2$

$F'_y = 2y \longrightarrow F'_y(3,2,1) = 2$

$F'_v = xe^{3v-x}\, 3 + \frac{1}{v} - 7 \longrightarrow F'_v(3,2,1) = 3$

$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \phi'_x(3,2) = -\frac{-2}{3} \\ \phi'_y(3,2) = -\frac{2}{3} \end{matrix}$

NOTA

9 +1

$$z = f(u,v) = \ln\left(\frac{uv}{2}\right) + \frac{4v}{u} + \frac{5}{6}u$$

$$f'_u = \frac{\frac{v}{2}}{\frac{uv}{2}} - \frac{4v}{u^2} + \frac{5}{6} \longrightarrow f'_{u(4,1)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{5}{6} = \boxed{\frac{5}{6} = f'_{u(4,1)}}$$

$$f'_v = \frac{\frac{u}{2}}{\frac{uv}{2}} + \frac{4}{u} \rightarrow f'_{v(4,1)} = 1 + 4 = \boxed{5 = f'_{v(4,1)}}$$

$$\nabla h(3,2) = \left(\frac{10}{3}, -\frac{5}{2}\right) \longrightarrow \vec{u}_1 \perp \nabla h(3,2) = \left(\frac{10}{3}, \frac{5}{2}\right)$$

$$\|\vec{u}_1\| = \|\vec{u}_2\| = \frac{25}{6} \qquad \vec{u}_2 \perp \nabla h(3,2) = \left(-\frac{10}{3}, -\frac{5}{2}\right)$$

$$\check{u}_1 = \left(\frac{10/3}{25/6}, \frac{5/2}{25/6}\right) \longrightarrow \boxed{\check{u}_1 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)}$$

$$\check{u}_2 = \left(\frac{-10/3}{25/6}, \frac{-5/2}{25/6}\right) \longrightarrow \boxed{\check{u}_2 = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)}$$

b) Hallar la derivada direccional máximo de h en (3,2) y la dirección que la promueve

$$h'((3,2), \check{u})\Big|_{max} = \|\vec{\nabla} h(3,2)\| = \boxed{\frac{25}{6} = h'((3,2), \check{u})\Big|_{max}}$$

$$\boxed{\check{u}_{max} = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)}$$

NOTA

AM 2	1° parcial Prof. Amed	HOJA N° 4/4 FECHA 16-5-15

(P3) Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \;/\; f(x,y,z) = x^2+2y^2-z+6$

Hallar la derivada direccional de f en $\bar{x}_0 = (2,2,2)$

a) respecto de un versor tangente a la curva C en $\bar{P}_0 = (1,1,z_0)$ /

$C = S_1 \cap S_2$ $\qquad S_1$: sup nivel 6 de f

$\qquad S_2: z = 4-x^2$

$S_1: x^2+2y^2-z+6=6 \to x^2+2y^2-z=0 \to \boxed{z = x^2+2y^2} : S_1$

$S_2: z = 4-x^2 \qquad C: S_1\cap S_2 \Rightarrow \begin{cases} z = x^2+2y^2 \\ z = 4-x^2 \end{cases}$

$4-x^2 = x^2+2y^2 \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ z = 4-x^2 \end{cases} : C$

$P_0 \in C \Rightarrow z_0 = 4-1^2 = 3 \quad \boxed{\bar{P}_0 = (1,1,3)}$

$\boxed{C: \bar{\beta}(t) = (\sqrt{2}\cos(t), \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(t), 4-2\cos^2(t))} \qquad t\in[0,2\pi]$

$P_0 = (1, 1, 3) \to \boxed{t = \frac{\pi}{4}}$

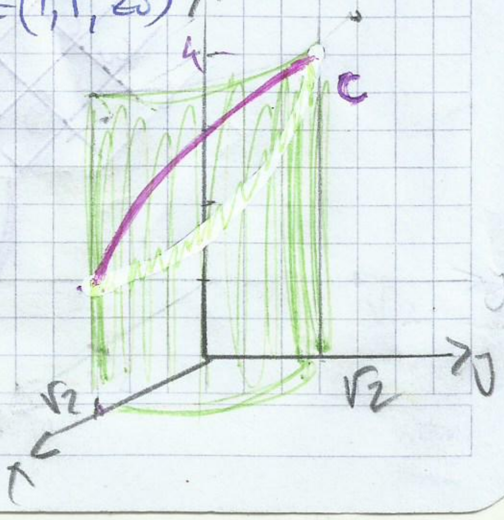
$\bar{\beta}'(t) = (-\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(t), \sqrt{2}\cos(t), 4\,\mathrm{sen}(t)\cos(t)) \to \boxed{\bar{\beta}'(\tfrac{\pi}{4}) = (-1,1,2)}$

$$\boxed{\breve{\mu}_1 = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)}$$

f es dif $\Rightarrow f'((2,2,2),\breve{\mu}) = \bar{\nabla} f_{(2,2,2)} \cdot \breve{\mu} = (4,8,-1)\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$\begin{cases} f'_x = 2x \\ f'_y = 4y \\ f'_z = -1 \end{cases} \to \nabla f_{(2,2,2)} = (4,8,-1) \qquad \boxed{f'((2,2,2),\breve{\mu}_1) = \frac{\sqrt{6}}{3}}$

b) respecto de un versor normal a S_2 en $\bar{P}_0 = (1,1,z_0)$
Representar C en el 1° octante



$S_2: x^2+z-4=0 \to N_{S_2} = (2x,0,1)$

$\breve{\mu}_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \leftarrow N_{S_2\,P_0} = (2,0,1)$

$f'((2,2,2),\breve{\mu}_2) = (4,8,-1)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{7}{\sqrt{5}}$

$$\boxed{f'_{((2,2,2),\breve{\mu}_2)} = 7/\sqrt{5}}$$

NOTA

P4) Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Si la sup de ec. $z = f(x,y)$ tiene plano tang. de ecuación: $2x + y - 3z = 3$ en el punto $(3,3,z_0)$

Se pide:

a) Calcular $f'((3,3),\breve{u})$ si $\breve{u}$ es tangente en $\bar{A} = (2,2)$ a la curva de nivel 0 de g:

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2-8}{\sqrt{xy}} & si \; xy > 0 \\ sen(\pi y - \pi x) & si \; xy \leq 0 \end{cases}$$

$C_0 = \{(x,y) \in dom(g) \;/\; g(x,y) = 0\}$ en $(2,2)$ $xy > 0$

$$0 = \frac{x^2+y^2-8}{\sqrt{xy}} \longrightarrow \boxed{C_0: x^2+y^2 = 8}$$

$C_0: \bar{\beta}(t) = (\sqrt{8}\cos(t), \sqrt{8}\,sen(t))$ en $(2,2) \to \begin{cases} 2 = \sqrt{8}\cos(t) \\ 2 = \sqrt{8}\,sen(t) \end{cases} \to \boxed{t = \frac{\pi}{4}}$

$\bar{\beta}'(t) = (-\sqrt{8}\,sen(t), \sqrt{8}\cos(t)) \to \vec{u} = \bar{\beta}'(\frac{\pi}{4}) = (-2,2)$

$$\boxed{\breve{u} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

ec. pl. tang a f en $(3,3,z_0)$: $z = f(3,3) + f'_x(3,3)(x-3) + f'_y(3,3)(y-3)$

x enun.

$2x + y - 3z = 3 \to z = \dfrac{2x+y-3}{3} = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{y}{3} - 1$

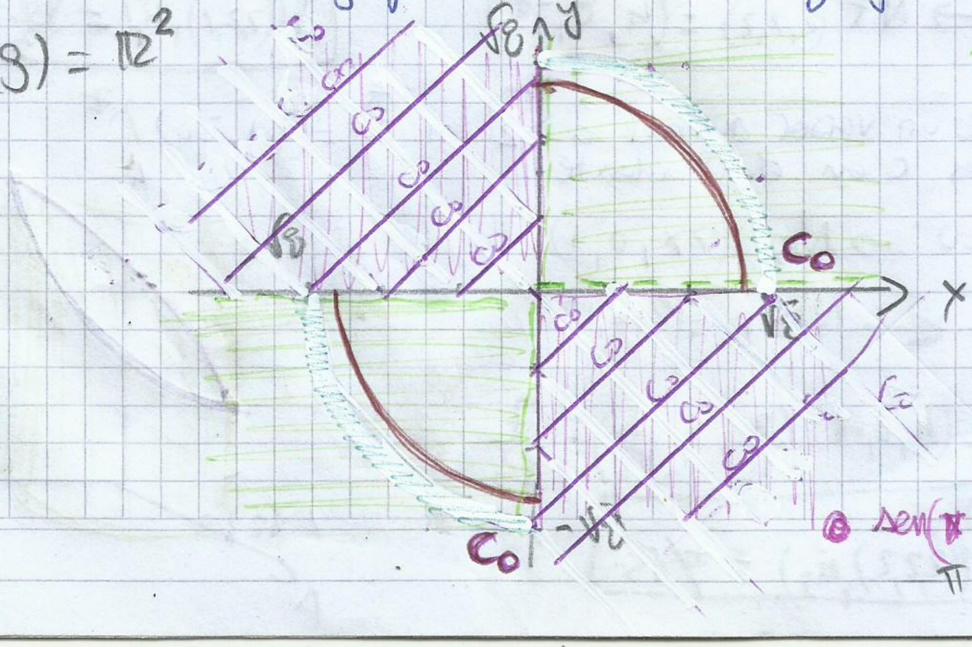
$$\to \left.\begin{aligned} f'_x(3,3) &= 2/3 \\ f'_y(3,3) &= 1/3 \end{aligned}\right\} \bar{\nabla} f_{(3,3)} = (2/3, 1/3)$$

f es dif.

$$f'((3,3),\breve{u}) = \bar{\nabla} f_{(3,3)} \cdot \breve{u} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \boxed{\frac{-\sqrt{2}}{6} = f'((3,3),\breve{u})}$$

b) Expresar analítica y gráficamente el D_g y su conj de nivel 0

$Dom(g) = \mathbb{R}^2$



$g = \dfrac{x^2+y^2-8}{\sqrt{xy}}$

$sen(\pi y - \pi x) = g(x,y)$

$\pi(y-x)$